ODR I. Cvičení 7.

Stabilita nulového řešení. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}t$ je otevřená množina, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojitá, $I = [\tau, +\infty)$, $\{0\} \times I \subset \Omega$, $f(0,t) = 0\ \forall t \in I$. Potom řešení rovnice $x' = f(x,t)$ se nazývá

I stabilní: $\forall t_0 \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že $|x_0| < \delta \Longrightarrow |\varphi(t; t_0, x_0)| < \varepsilon\ \forall t \geq t_0$.

II nestabilní: pokud není stabilní.

III lokální atraktor: $\forall t_0 \in I\ \exists \eta > 0$ tak, že $|x_0| < \delta \Longrightarrow |\varphi(t; t_0, x_0)| \to 0$ pro $t \to +\infty$.

IV asymptoticky stabilní: stabilní & lokální atraktor.

Věta o linearizované stabilitě. Dána rovnice (AR) $x = f(x)$, kde f je třídy C^1 na okolí x_0. Nechť $f(x_0) = 0$ a matice $A = \nabla f(x_0)$ splňuje $\operatorname{Re}\lambda < 0$ pro $\forall \lambda \in \sigma(A)$. Pak $x(t) \equiv x_0$ je asymptoticky stabilní.

Věta o linearizované nestabilitě. Dána rovnice (AR) $x = f(x)$, kde f je třídy C^1 na okolí x_0. Nechť $f(x_0) = 0$ a matice $A = \nabla f(x_0)$ splňuje $\exists \lambda \in \sigma(A)$ že $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Pak $x(t) \equiv x_0$ není stabilní.

Poznámka. Předchozí věta o stabilitě neplatí pro neautonomní rovnici. Viz příklad na stránce 3 kapitoly 8 o Stabilitě, Sbírka příkladů z ODR T.Barty a D.Pražáka,
https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~barta/pcODR/index.html

Úlohy na exponenciálu.

1. Pro následující soustavu vypočtěte X_+, X_-, X_c a poté e^{tA}.

   (a) $\begin{cases} x' = 14x + 26y - 8z, \\ y' = -6x - 11y + 4z, \\ z' = 3x + 6y - z; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = -x - 2y + 4z, \\ y' = -2x + 3y + z, \\ z' = -3x + 5y + z \end{cases}$

2. Exponenciála matice A je rovna $e^{tA} = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{-t} & 2e^t - 2e^{-t} \\ -e^t + e^{-t} & -e^t + 2e^{-t} \end{pmatrix}$.

   (a) Napište řešení odpovídající soustavy s počáteční podmínkou $(3, -2)^T$ v čase $t_0 = 0$.

   (b) Najděte stabilní podprostor. (c) Napište matici A.

3. Nakreslete fázový portrét lineárního systému $x' = Ax$, kde

   (a) $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a > 0$. Rozlište případy $b > a > 0,\ a = b > 0,\ a > b > 0,\ b = 0,\ b < 0$,

   (b) $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $b > 0$. Rozlište případy $a > 0,\ a = 0,\ a < 0$.

4. (Zároveň DÚ). Pro nějakou matici A známe první sloupec maticovy exponenty,

   $$e^{At} = \begin{pmatrix} -3e^t + 4e^{-t} & * \\ 2e^t - 2e^{-t} & * \end{pmatrix}.$$

   Najděte A, e^{At}, stabilní, nestabilní a centrální podprostory.

Úlohy na stabilitu.

5. Vyšetřete stabilitu počátku:
   $\begin{cases} x' = 4(e^x - 1) - 2y - 4z + y^2, \\ y' = x - 3y - z + (x+y)y^2, \\ z' = -4z + \sinh x + (x+y)z^2. \end{cases}$

Nalezněte stacionární body následujících soustav a rozhodněte o jejich stabilitě:

6. $\begin{cases} x' = \sin(xy) - \frac{1}{2}, \\ y' = -xy - y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = 1 - x^2 - y^2, \\ y' = z^2 - x - y, \\ z' = z^2 - 1. \end{cases}$

8. (Zaroveň DÚ)
   $\begin{cases} x' = xy - 2x - y + 2, \\ y' = xy + yz + xz, \\ z' = 2y(z+1). \end{cases}$